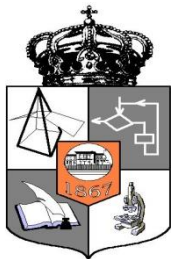




18 mai 2019



Ministerul Educației Naționale
Inspectoratul Școlar Județean Bacău
COLEGIUL NAȚIONAL „FERDINAND I”

SECȚIUNEA ION BARBU - clasa a IX-a

Barem de corectare și evaluare- matematică (45p)

SUBIECTUL I (25 p)

Fie funcția $f: Q - \{-1, 0, 1\} \rightarrow Q - \{-1, 0, 1\}$, $f(x) = x - x^{-1}$.

Pentru orice număr $x \in Q - \{-1, 0, 1\}$, scris sub formă de fracție ireductibilă $x = \frac{p}{q}$, notăm $h(x) = |p| + |q|$.

a) Să se demonstreze că $h(f(x)) \geq h(x) + 2$, pentru orice $x \in Q - \{-1, 0, 1\}$.

b) Să se justifice dacă există $t \in Q - \{-1, 0, 1\}$ cu proprietatea că, pentru orice număr natural nenul n , există $a_n \in Q - \{-1, 0, 1\}$, astfel încât $t = \underbrace{(fofo \dots of)}_{\text{de } n \text{ ori}}(a_n)$.

a) Se demonstrează că dacă $x = \frac{p}{q}$ este fracție ireductibilă, atunci $f(x) = \frac{p^2 - q^2}{pq}$ este fracție ireductibilă.....4p

$p, q \in \mathbb{Z}^*, |p| \neq |q| \Rightarrow |p^2 - q^2| \geq 3$3p

$h(f(x)) = |p^2 - q^2| + |pq| \geq 3 + |pq| \geq |p| + |q| + 2 \Rightarrow h(f(x)) \geq h(x) + 2$3p

b) Notăm $\underbrace{fofo \dots of}_{\text{de } n \text{ ori}} = f_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$; Se demonstrează prin inducție matematică inegalitatea

$h(f_n(x)) \geq h(x) + 2n \cdot x, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ și } \forall x \in Q - \{-1, 0, 1\}$8p

Presupunem că există $t \in Q - \{-1, 0, 1\}$ cu proprietatea că, pentru orice număr natural nenul n , există $a_n \in Q - \{-1, 0, 1\}$ a.î. $t = f_n(a_n) \Rightarrow h(t) = h(f_n(a_n)) \geq h(a_n) + 2n > 2n$. De aici,

$n < \frac{1}{2} \cdot h(t), \forall n \in \mathbb{N}^*$, ceea ce este absurd; de exemplu, $\left[\frac{1}{2} \cdot h(t)\right] + 1 > \frac{1}{2} \cdot h(t)$7p

SUBIECTUL II (20 p)

Pe laturile AB, BC, CA ale triunghiului ABC se consideră punctele M, N, respectiv P, astfel încât $AM = BN = CP$. Dacă I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC și $AB \cdot \overrightarrow{IM} + BC \cdot \overrightarrow{IN} + CA \cdot \overrightarrow{IP} = \vec{0}$, să se demonstreze că ABC este triunghi echilateral.

Fie $AB = c, BC = a, CA = b$ și $AM = BN = CP = x$

Din $\overrightarrow{AM} = \frac{x}{c} \overrightarrow{AB}$ rezultă $c \overrightarrow{IM} = (c - x) \overrightarrow{IA} + x \overrightarrow{IB}$5p

Analog, obținem $a \overrightarrow{IN} = (a - x) \overrightarrow{IB} + x \overrightarrow{IC}$ și $b \overrightarrow{IP} = (b - x) \overrightarrow{IC} + x \overrightarrow{IA}$. Adunând cele trei

egalități obținem $c \overrightarrow{IM} + a \overrightarrow{IN} + b \overrightarrow{IP} = c \overrightarrow{IA} + a \overrightarrow{IB} + b \overrightarrow{IC} \Rightarrow c \overrightarrow{IA} + a \overrightarrow{IB} + b \overrightarrow{IC} = \vec{0}$4p

I fiind centrul cercului înscris în triunghi, avem $a \overrightarrow{IA} + b \overrightarrow{IB} + c \overrightarrow{IC} = \vec{0}$5p

Din $c \cdot (c \overrightarrow{IA} + a \overrightarrow{IB} + b \overrightarrow{IC}) - b \cdot (a \overrightarrow{IA} + b \overrightarrow{IB} + c \overrightarrow{IC}) = \vec{0}$ rezultă $(c^2 - ab) \overrightarrow{IA} +$

$(ac - b^2) \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ și cum $\overrightarrow{IA}$ și $\overrightarrow{IB}$ sunt vectori necoliniari, deducem că $c^2 = ab$ și $b^2 = ac$.

De aici rezultă că $a = b = c$. Triunghiul ABC este echilateral.6p